

# TIPE: Précession du Périhélie de Mercure

Jean-Julien FLECK

Épreuve de TIPE

Session 2019

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction Historique
- 2 Le point de vue de la Relativité Restreinte
- 3 Le point de vue de la Relativité Générale
- 4 Conclusion
- 5 Exemples divers

# Introduction historique

## Position du problème

- La mécanique newtonienne, une mécanique bien huilée
- Précession du périhélie de Mercure

# Introduction historique

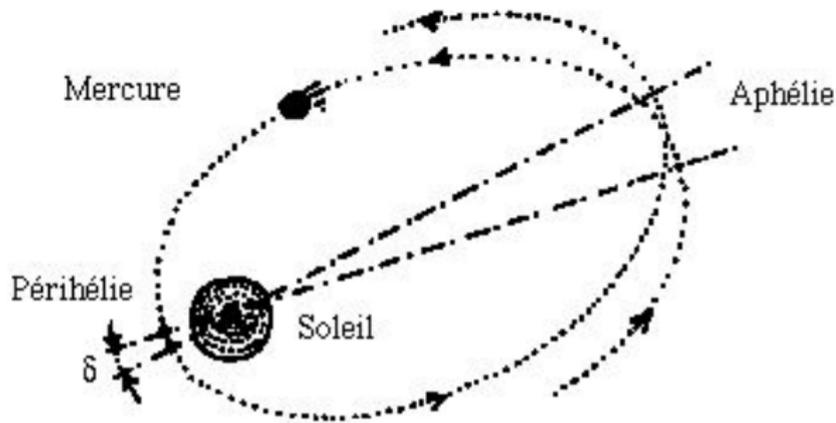
## Position du problème

- La mécanique newtonienne, une mécanique bien huilée
- Précession du périhélie de Mercure

# Introduction historique

## Position du problème

- La mécanique newtonienne, une mécanique bien huilée
- Précession du périhélie de Mercure



# Introduction historique

## Explication classique

- Théorie des perturbations : explication de  $531''$  d'arc/siècle
- Vulcain, un bon candidat (Le Verrier, 1859)
- mais pas de confirmation expérimentale...

# Introduction historique

## Explication classique

- Théorie des perturbations : explication de  $531''$  d'arc/siècle
- Vulcain, un bon candidat (Le Verrier, 1859)
- mais pas de confirmation expérimentale...

# Introduction historique

## Explication classique

- Théorie des perturbations : explication de  $531''$  d'arc/siècle
- Vulcain, un bon candidat (Le Verrier, 1859)
- mais pas de confirmation expérimentale...

# Introduction historique

## Complément relativiste

- La relativité restreinte permet déjà un mieux (7'' d'arc en plus par siècle)
- mais c'est la générale qui va sauver la mise en ajoutant les 43'' qui manquaient

# Introduction historique

## Complément relativiste

- La relativité restreinte permet déjà un mieux (7'' d'arc en plus par siècle)
- mais c'est la générale qui va sauver la mise en ajoutant les 43'' qui manquaient

# Relativité Restreinte

## Dynamique relativiste

- Nouvelle définition de la quantité de mouvement

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Avec les développements « classiques » et en posant  $u = 1/r$ , on en arrive à l'équation

# Relativité Restreinte

## Dynamique relativiste

- Nouvelle définition de la quantité de mouvement

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Avec les développements « classiques » et en posant  $u = 1/r$ , on en arrive à l'équation

# Relativité Restreinte

## Dynamique relativiste

- Nouvelle définition de la quantité de mouvement

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Avec les développements « classiques » et en posant  $u = 1/r$ , on en arrive à l'équation

$$\underbrace{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm E}{L^2 c^2}}_{\text{Partie usuelle}} + \underbrace{\frac{(GMm)^2}{L^2 c^2} u}_{\text{Partie relativiste}}$$

# Relativité Restreinte

## Dynamique relativiste

- Nouvelle définition de la quantité de mouvement

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Avec les développements « classiques » et en posant  $u = 1/r$ , on en arrive à l'équation

$$\underbrace{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u}_{\text{Partie usuelle}} = \frac{GMm E}{L^2 c^2} + \underbrace{\frac{(GMm)^2}{L^2 c^2} u}_{\text{Partie relativiste}}$$

# Relativité Restreinte

## Dynamique relativiste

- Nouvelle définition de la quantité de mouvement

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Avec les développements « classiques » et en posant  $u = 1/r$ , on en arrive à l'équation

$$\underbrace{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm E}{L^2 c^2}}_{\text{Partie usuelle}} + \underbrace{\frac{(GMm)^2}{L^2 c^2} u}_{\text{Partie relativiste}}$$

# Relativité Restreinte

## Dynamique relativiste

- Nouvelle définition de la quantité de mouvement

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Avec les développements « classiques » et en posant  $u = 1/r$ , on en arrive à l'équation

$$\underbrace{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u}_{\text{Partie usuelle}} = \frac{GMm E}{L^2 c^2} + \underbrace{\frac{(GMm)^2}{L^2 c^2} u}_{\text{Partie relativiste}}$$

# Relativité Restreinte

## Équation de l'ellipse

- Équation différentielle remise en forme

$$\frac{du}{d\theta} + B^2 u = A \quad \text{avec} \quad B = \sqrt{1 - \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2}$$

- Équation de l'« ellipse »

$$u = \frac{A}{B^2} (1 + e \cos [B (\theta - \theta_0)]) \quad \text{soit} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos [B (\theta - \theta_0)]}$$

# Relativité Restreinte

## Équation de l'ellipse

- Équation différentielle remise en forme

$$\frac{du}{d\theta} + B^2 u = A \quad \text{avec} \quad B = \sqrt{1 - \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2}$$

- Équation de l'« ellipse »

$$u = \frac{A}{B^2} (1 + e \cos [B (\theta - \theta_0)]) \quad \text{soit} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos [B (\theta - \theta_0)]}$$

# Relativité Restreinte

## Équation de l'ellipse

- Équation différentielle remise en forme

$$\frac{du}{d\theta} + B^2 u = A \quad \text{avec} \quad B = \sqrt{1 - \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2}$$

- Équation de l'« ellipse »

$$u = \frac{A}{B^2} (1 + e \cos [B(\theta - \theta_0)]) \quad \text{soit} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos [B(\theta - \theta_0)]}$$

# Relativité Restreinte

## Équation de l'ellipse

- Équation différentielle remise en forme

$$\frac{du}{d\theta} + B^2 u = A \quad \text{avec} \quad B = \sqrt{1 - \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2}$$

- Équation de l'« ellipse »

$$u = \frac{A}{B^2} (1 + e \cos [B (\theta - \theta_0)]) \quad \text{soit} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos [B (\theta - \theta_0)]}$$

# Relativité Restreinte

## Équation de l'ellipse

- Équation différentielle remise en forme

$$\frac{du}{d\theta} + B^2 u = A \quad \text{avec} \quad B = \sqrt{1 - \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2}$$

- Équation de l'« ellipse »

$$u = \frac{A}{B^2} (1 + e \cos [B(\theta - \theta_0)]) \quad \text{soit} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos [B(\theta - \theta_0)]}$$

# Relativité Restreinte

## Équation de l'ellipse

- Équation différentielle remise en forme

$$\frac{du}{d\theta} + B^2 u = A \quad \text{avec} \quad B = \sqrt{1 - \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2}$$

- Équation de l'« ellipse »

$$u = \frac{A}{B^2} (1 + e \cos [B (\theta - \theta_0)]) \quad \text{soit} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos [B (\theta - \theta_0)]}$$

# Relativité Restreinte

## Avance du périhélie

- L'« ellipse » ne se referme pas sur elle-même du fait que  $B \neq 1$
- Entre deux périhélies successifs,  $\theta$  tourne de  $2\pi + \delta$  où

$$\delta = 2\pi \left( \frac{1}{B} - 1 \right) \approx \pi \left( \frac{GMm}{Lc} \right)^2 = \pi \frac{GM}{pc^2} = \pi \frac{GM}{ac^2(1-e^2)}$$

- Malheureusement, l'application numérique ne donne « que »  $7''$  d'arc par siècle...

# Relativité Restreinte

## Avance du périhélie

- L'« ellipse » ne se referme pas sur elle-même du fait que  $B \neq 1$
- Entre deux périhélies successifs,  $\theta$  tourne de  $2\pi + \delta$  où

$$\delta = 2\pi \left( \frac{1}{B} - 1 \right) \approx \pi \left( \frac{GMm}{Lc} \right)^2 = \pi \frac{GM}{pc^2} = \pi \frac{GM}{ac^2(1-e^2)}$$

- Malheureusement, l'application numérique ne donne « que »  $7''$  d'arc par siècle...

# Relativité Restreinte

## Avance du périhélie

- L'« ellipse » ne se referme pas sur elle-même du fait que  $B \neq 1$
- Entre deux périhélies successifs,  $\theta$  tourne de  $2\pi + \delta$  où

$$\delta = 2\pi \left( \frac{1}{B} - 1 \right) \approx \pi \left( \frac{GMm}{Lc} \right)^2 = \pi \frac{GM}{pc^2} = \pi \frac{GM}{ac^2(1-e^2)}$$

- Malheureusement, l'application numérique ne donne « que »  $7''$  d'arc par siècle...

# Relativité Restreinte

## Avance du périhélie

- L'« ellipse » ne se referme pas sur elle-même du fait que  $B \neq 1$
- Entre deux périhélies successifs,  $\theta$  tourne de  $2\pi + \delta$  où

$$\delta = 2\pi \left( \frac{1}{B} - 1 \right) \approx \pi \left( \frac{GMm}{Lc} \right)^2 = \pi \frac{GM}{pc^2} = \pi \frac{GM}{ac^2(1-e^2)}$$

- Malheureusement, l'application numérique ne donne « que »  $7''$  d'arc par siècle...

# Relativité Générale

Et zut...

- Il n'y a plus guère de temps pour parler
- Alors zou, on balance le résultat des calculs

$$\underbrace{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u}_{\text{Partie classique}} = \underbrace{\frac{GMm^2}{L^2}}_{\text{RG}} + \underbrace{\frac{3GM}{c^2} u^2}_{\text{RG}}$$

- Après avoir bien bossé, on obtient finalement

$$\delta = 6\pi \frac{GM}{ac^2(1-e^2)}$$

# Relativité Générale

Et zut...

- Il n'y a plus guère de temps pour parler
- Alors zou, on balance le résultat des calculs

$$\underbrace{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u}_{\text{Partie classique}} = \underbrace{\frac{GMm^2}{L^2}}_{\text{RG}} + \underbrace{\frac{3GM}{c^2} u^2}_{\text{RG}}$$

- Après avoir bien bossé, on obtient finalement

$$\delta = 6\pi \frac{GM}{ac^2(1-e^2)}$$

# Relativité Générale

Et zut...

- Il n'y a plus guère de temps pour parler
- Alors zou, on balance le résultat des calculs

$$\underbrace{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u}_{\text{Partie classique}} = \frac{GMm^2}{L^2} + \underbrace{\frac{3GM}{c^2} u^2}_{\text{RG}}$$

- Après avoir bien bossé, on obtient finalement

$$\delta = 6\pi \frac{GM}{ac^2(1-e^2)}$$

# Relativité Générale

Et zut...

- Il n'y a plus guère de temps pour parler
- Alors zou, on balance le résultat des calculs

$$\underbrace{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u}_{\text{Partie classique}} = \frac{GMm^2}{L^2} + \underbrace{\frac{3GM}{c^2} u^2}_{\text{RG}}$$

- Après avoir bien bossé, on obtient finalement

$$\delta = 6\pi \frac{GM}{ac^2(1-e^2)}$$

# Relativité Générale

## Le code informatique

```
1 import scipy as sp
2 import scipy.optimize
3
4 def ma_fonction(x):
5     return []
6
7 # À vous de remplir les choses adéquates...
```

# Conclusion

sous forme de tableau

Newton	Rel. Restreinte	Rel. Générale
531"/siècle	(+7"/siècle)	+43"/siècle
Observations : 574"/siècle		

TABLE – Effet des différentes théories

# Exemples

## Apparitions successives

- Ce point apparaîtrait en premier et reste tout le temps
- Celui-ci ne n'apparaîtra que à la 2<sup>e</sup> page de cette diapo (mais l'espace reste disponible)
- ...avant donc l'apparition du 4<sup>e</sup> (mais c'est bizarre de procéder ainsi)
- Et celui-ci vient en 3<sup>e</sup> et reste jusqu'à la fin...

# Exemples

## Apparitions successives

- Ce point apparaîtrait en premier et reste tout le temps
- Celui-ci ne n'apparaîtra que à la 2<sup>e</sup> page de cette diapo (mais l'espace reste disponible)
- ...avant donc l'apparition du 4<sup>e</sup> (mais c'est bizarre de procéder ainsi)
- Et celui-ci vient en 3<sup>e</sup> et reste jusqu'à la fin...

# Exemples

## Apparitions successives

- Ce point apparaîtrait en premier et reste tout le temps
- Celui-ci ne n'apparaîtra que à la 2<sup>e</sup> page de cette diapo (mais l'espace reste disponible)
- ...avant donc l'apparition du 4<sup>e</sup> (mais c'est bizarre de procéder ainsi)
- Et celui-ci vient en 3<sup>e</sup> et reste jusqu'à la fin...

# Exemples

## Apparitions successives

- Ce point apparaîtrait en premier et reste tout le temps
- Celui-ci ne n'apparaîtra que à la 2<sup>e</sup> page de cette diapo (mais l'espace reste disponible)
- ...avant donc l'apparition du 4<sup>e</sup> (mais c'est bizarre de procéder ainsi)
- Et celui-ci vient en 3<sup>e</sup> et reste jusqu'à la fin...

# Exemples

## Apparition d'une figure

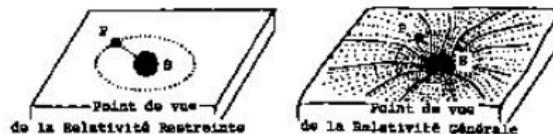
On peut aussi mettre du texte brut avant apparition d'une figure

Et le texte qui suit

# Exemples

## Apparition d'une figure

On peut aussi mettre du texte brut avant apparition d'une figure

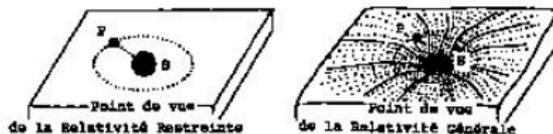


Et le texte qui suit

# Exemples

## Apparition d'une figure

On peut aussi mettre du texte brut avant apparition d'une figure



Et le texte qui suit

# Exemples

## Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0^2} \times \theta = \underbrace{A}_{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0^2} \times \theta = \underbrace{A}_{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0^2}$$

# Exemples

## Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}{=\omega_0^2} \times \theta = \underbrace{A}_{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}{=\omega_0^2} \times \theta = \underbrace{A}_{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0^2}$$

# Exemples

## Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}{=\omega_0^2} \times \theta = \underbrace{A}_{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}{=\omega_0^2} \times \theta = \underbrace{A}_{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0^2}$$

# Exemples

## Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}{=\omega_0^2} \times \theta = \underbrace{A}_{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}{=\omega_0^2} \times \theta = \underbrace{A}_{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0^2}$$

# Exemples

## Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}{=\omega_0^2} \times \theta = \underbrace{A}_{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}{=\omega_0^2} \times \theta = \underbrace{A}_{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0^2}$$

# Exemples

## Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}{=\omega_0^2} \times \theta = \underbrace{A}_{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}{=\omega_0^2} \times \theta = \underbrace{A}_{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0^2}$$

# Exemples

## Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}{=\omega_0^2} \times \theta = \underbrace{A}_{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}{=\omega_0^2} \times \theta = \underbrace{A}_{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0^2}$$